

**Analiza funkcjonalna**  
**Lista 2**

**Zad 1.** Udowodnić, że zbieżność w normie  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$  na przestrzeni  $C[a, b]$  jest równoważna zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego.

**Zad 2.** Pokazać, że przestrzeń  $(C^{(1)}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ , gdzie  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$  nie jest przestrzenią Banacha?

**Zad 3.** Czy przestrzeń  $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ , gdzie  $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt$ , jest przestrzenią Banacha?

**Zad 4.** Sprawdzić, czy podzbiór  $M$  przestrzeni  $C[0, 1]$  jest otwarty, domknięty lub ograniczony.

N	M	N	M
1.	$\{x : x(0) = 0\}$	3.	$\{x : \int_0^1 x(t) dt = 0\}$
2.	$\{x : x(0) = x(1)\}$	4.	$\{x : \int_0^1 x(t) dt < 1\}$

**Zad 5.** Sprawdzić, czy ciąg funkcji  $x_n$  jest zbieżny do funkcji  $\alpha$  w przestrzeni  $C[a, b]$ , gdy

N	$C[a, b]$	$x_n$	$\alpha$
1.	$C[-3, 3]$	$\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^3}}$	$ t $
2.	$C[0, 8]$	$(\frac{t}{8})^n - (\frac{t}{8})^{2n} + t$	$t$
3.	$C[0, 1]$	$t^{2n} - t^{n+1} + t$	$t$
4.	$C[-4, 4]$	$\frac{1}{n^2} \sqrt{n^4 t^2 + 1}$	$t$
5.	$C[1, 2]$	$n^2 (\sqrt{t + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{t})$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$
6.	$C[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	$\frac{t^n - t}{1 + t^n}$	$1$
7.	$C[0, 1]$	$\sqrt[n]{1 + t^n}$	$t$
9.	$C[0, \frac{1}{3}]$	$3^n t^n - 3^{n+1} t^{n+1} - 3t^n$	$0$
10.	$C[0, 2]$	$\sqrt[n]{1 + t^n}$	$\begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \\ t, & t \in [1, 2] \end{cases}$

**Zad 6.** Z badać zbieżność ciągu funkcji  $x_n$  w przestrzeni  $X$ , gdy

N	$X$	$x_n$
1.	$C[-1, 0]$	$\frac{1}{n} \sqrt[3]{n^3 t + 1}$
2.	$C[1, 2]$	$\frac{2t^n - 1}{1 + t^n}$
3.	$C[-1, \frac{1}{2}]$	$\frac{(t+1)^{2n} - t^{2n}}{(t+2)^{2n}}$
4.	$C[1, 2]$	$n \sin(\frac{t^2}{n}) + \frac{t^3}{n}$
5.	$C[0, 9]$	$\frac{9^n t^n - t^{2n}}{9^{2n}}$
6.	$C^{(1)}[0, 1]$	$\frac{t^n}{n}$
7.	$C[-1, 5]$	$\arctg(n(t^2 + 1))$
8.	$C[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$(\sin t)^{2n} + \sqrt[3]{\frac{t}{n}}$
9.	$C[1, 2]$	$\frac{t^2}{n^2} \ln(\frac{t}{n})$